Operatore risolvente, autovalori ed autofunzioni

1. Operatore risolvente

Esercizio 1. *Se $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g \in L^2(\Omega)$ e u, v sono le soluzioni deboli di*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega, \qquad u \in H_0^1(\Omega),$$

$$-\Delta v = g \quad in \quad \Omega, \qquad v \in H_0^1(\Omega),$$

allora $w = \alpha u + v$ è la soluzione debole di

$$-\Delta w = \alpha f + g \quad in \quad \Omega, \qquad w \in H_0^1(\Omega).$$

Esercizio 2. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$. Allora, esiste una costante C che dipende da Ω tale che per ogni $f \in L^2(\Omega)$ si ha*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

dove u è la soluzione debole di

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

In particolare, abbiamo anche

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Teorema 3. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$. Per ogni $f \in L^2(\Omega)$ definiamo la funzione*

$$u = R_\Omega(f) \in H_0^1(\Omega)$$

come l'unica soluzione debole del problema

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

Allora, la mappa

$$R_\Omega : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$$

è un operatore lineare e limitato. Inoltre, come applicazione

$$R_\Omega : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

l'operatore R_Ω è:

- *lineare e continuo;*
- *definito positivo:*

$$\int_\Omega f R_\Omega(f)\,dx > 0 \quad per\ ogni \quad f \in L^2(\Omega),\ f \neq 0\ ;$$

- *simmetrico:*

$$\int_\Omega f R_\Omega(g)\,dx = \int_\Omega g R_\Omega(f)\,dx \quad per\ ogni \quad f, g \in L^2(\Omega)\ ;$$

- *compatto: per ogni successione $f_n \in L^2(\Omega)$ che converge debole-L^2 ad una funzione f, la successione $R_\Omega(f_n)$ converge forte-$L^2(\Omega)$ a $R_\Omega(f)$.*

2. Autovalori e autofunzioni del Laplaciano

Corollario 4. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$. Allora lo spettro $\sigma(R_\Omega)$ dell'operatore R_Ω è discreto ed è una successione decrescente di numeri reali positivi*

$$\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \Lambda_3 \geq \dots$$

Inoltre, $\Lambda \in \sigma(R_\Omega)$ se e solo se $\Lambda > 0$ ed esiste una funzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema

$$-\Delta u = \lambda u \quad in \quad \Omega, \qquad u \in H_0^1(\Omega), \qquad \int_\Omega u^2\,dx = 1,$$

dove

$$\lambda := \frac{1}{\Lambda}.$$

Definizione 5. *Dato un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ definiamo lo spettro dell'operatore di Laplace con condizioni di Dirichlet come la successione crescente (e divergente) di numeri strettamente positivi*

$$\lambda_1(\Omega) \le \lambda_2(\Omega) \le \cdots \le \lambda_k(\Omega) \le \dots\ ,$$

dove

$$\lambda_k(\Omega) := \frac{1}{\Lambda_k},$$

dove Λ_k è l'autovalore dell'operatore $R_\Omega : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$. inoltre, per ogni $k \ge 1$ esiste una soluzione debole u_k del problema

$$-\Delta u_k = \lambda_k(\Omega)\, u_k \quad in \quad \Omega, \qquad u_k \in H^1_0(\Omega), \qquad \int_\Omega u_k^2\, dx = 1.$$

Proposizione 6. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$.*

(i) *Motrare che esiste una soluzione del problema variazionale*

$$\min\Big\{ \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \ : \ u \in H^1_0(\Omega)\, ,\ \int_\Omega u^2\, dx = 1 \Big\}.$$

(ii) *Mostrare che ogni minimo u è soluzione debole di*

$$-\Delta u = \lambda\, u \quad in \quad \Omega\ , \qquad u \in H^1_0(\Omega).$$

dove

$$\lambda = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx.$$

(iii) *Mostrare che λ è il più piccolo autovalore del Laplaciano con condizioni di Dirichlet, ovvero*

$$\lambda = \lambda_1(\Omega).$$